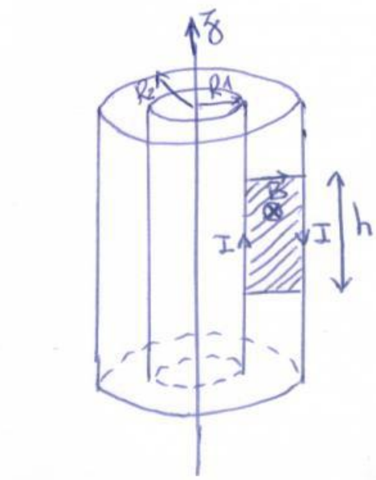
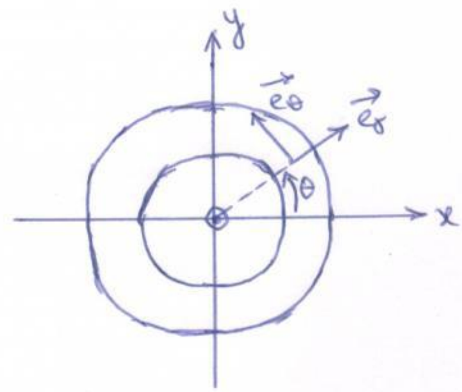
UNIVERSITE IBN TOFAIL
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
Cycle Intégré Préparatoire aux Formations d'Ingénieurs
Année Universitaire 2012/2013

Physique 3 : Électromagnétisme

SOLUTION Devoir libre N° 3 : Actions magnétiques et induction électromagnétique

Exercice 3.3. (Exercice supplémentaire)





3.3.1- D'après l'exercice 2.4. et en considérant le cylindre intérieur parcouru par un courant surfacique le champ magnétique $\vec{B}$ a pour expression :

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < R_1 \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta} & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ \vec{0} & \text{si } r > R_2 \end{cases}$$

(*) Donc le flux de $\vec{B}$ à travers la surface indiquée sur la figure de hauteur h entre R_1 et R_2 :

$$\phi(\vec{B}) = \iint_{(S)} \vec{B}.\vec{dS} = \iint_{(S)} \vec{B}.dS\,\vec{e_\theta} = \iint_{(S)} B.dS$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}$$

$$\phi(\vec{B}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} h . \mathrm{Ln}\frac{R_2}{R_1}$$

En plus : $\phi = L.I \Rightarrow L = \dfrac{\mu_0 h}{2\pi}.\mathrm{Ln}\dfrac{R_2}{R_1}$

L'inductance par unité de longueur est

$$\boxed{L = \frac{\mu_0}{2\pi}\mathrm{Ln}\frac{R_2}{R_1}}$$

(**) En utilisant l'énergie magnétique :

$$W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{(V)} \vec{B}^2 . dV \quad \text{(volume du cylindre creux de hauteur h)}$$

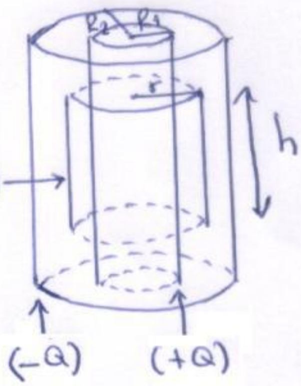
$$= \frac{1}{2\mu_0} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{(\mu_0 I)^2}{4\pi^2 r^2} r\, dr$$

$$= \frac{\cancel{2}\cancel{\pi} h}{\cancel{2}\cancel{\mu_0}} \cdot \frac{\mu_0^{\cancel{2}} I^2}{4\pi^{\cancel{2}}} \, Ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$= \frac{\mu_0 I^2 h}{4\pi} Ln \frac{R_2}{R_1}$$

Donc $L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} Ln \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow$ par unité de longueur $\boxed{L = \frac{\mu_0}{2\pi} Ln \frac{R_2}{R_1}}$

3.3.2. (Voir condensateur cylindrique) paragraphe 4.7.2 Eléctricité



Application du théorème de Gauss pour $R_1 < r < R_2$

Considérons la charge $(+Q)$ du cylindre intérieur ⇒ par influence le cylindre extérieur est chargé avec $(+Q)$

$$\iint_{(\Sigma)} \vec{E} . d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r h} \vec{e_r}$$

$$\Rightarrow \Delta V = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} . \vec{dl} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi \varepsilon_0 h}{Ln \frac{R_2}{R_1}}$$

La capacité par unité de longueur est :

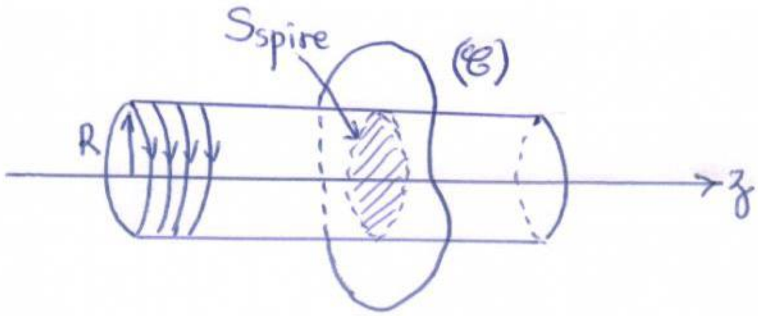
$$\boxed{C = \frac{2\pi \varepsilon_0}{Ln \frac{R_2}{R_1}}}$$

3.3.3. Le produit $LC = \mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ ← vitesse de la lumière

donc LC est une constante indépendante de R_1 et R_2.

Exercice 3.4. **(Exercice supplémentaire)**

3.4.1.



Calcul du flux du champ $\vec{B}$ crée par le solénoïde à travers la surface de $(\mathscr{C})$:

$$\phi(\vec{B}) = \iint_{(S)} \vec{B}.\vec{dS} \quad (S) \text{ est la surface délimitée par } (\mathscr{C})$$

D'après l'exercice 2.2 : $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e_z}$ à l'intérieur

$\vec{B} = \vec{0}$ à l'extérieur

$$\Rightarrow \phi = \mu_0 n i S_{spire} = \mu_0 n i \pi R^2$$

La f.é.m induite : $e(t) = -\dfrac{d\phi}{dt}$

$$e(t) = -\frac{d}{dt}\left(\mu_0 n \pi R^2 I_0 \cos\omega t\right)$$

$$\boxed{e(t) = \omega \mu_0 n \pi R^2 I_0 \sin\omega t}$$

3.4.2.

Symétrie : Tout plan $\perp$ à (Oz) est plan de symétrie

$\Rightarrow \vec{E} \in$ à ce plan $\Rightarrow E_z = 0$

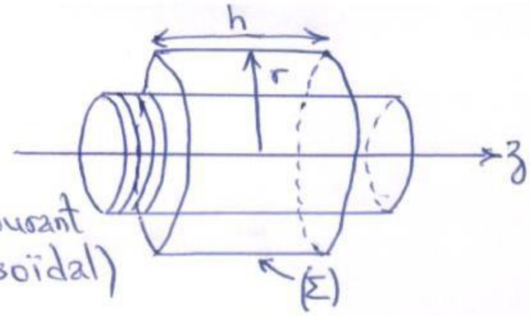
En utilisant les coordonnées cylindriques :

$$\vec{E}(M) = E_r \vec{e_r} + E_\theta \vec{e_\theta}$$

Invariance : la distribution est invariante par translation suivant (Oz) et par rotation autour de (Oz)

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e_r} + E_\theta(r)\vec{e_\theta}$$

* Application du théorème de Gauss pour $r > R$:



$$\iint_{(\Sigma)} \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0$$ (car le courant est sinusoïdal)

$$\Rightarrow \iint_{(S_L)} E_r . dS = 0$$ (S_L) surface latérale.

$$\Rightarrow E_r . 2\pi r h = 0 \Rightarrow \boxed{E_r(r) = 0}$$

Donc : $\vec{E}(M) = E_\theta(r)\vec{e_\theta}$

* Loi de Faraday : $e(t) = \oint_{(C)} \vec{E}.\vec{dl}$ (C) est un cercle d'axe Oz et de rayon r $(r > R)$

$$\Rightarrow e(t) = \oint E_\theta . dl = E_\theta . 2\pi r$$

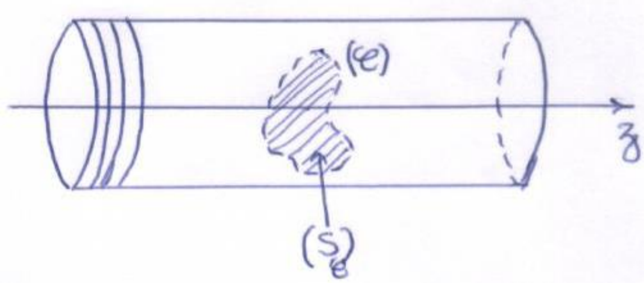
$$\Rightarrow E_\theta(r) = \frac{e(t)}{2\pi r} \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{E}(M) = \frac{\mu_0 n R^2}{2r}\omega I_0 \sin\omega t \vec{e_\theta}}$$

Rq : $\oint_{(\mathscr{C})} \vec{E}.\vec{dl} = e(t)$ ne dépend pas de $(\mathscr{C})$

3.4.3.

Le flux de $\vec{B}$ à travers $(S_{\mathscr{C}})$

$(S_{\mathscr{C}})$ surface délimité par le contour $(\mathscr{C})$



$$\phi = \mu_0 n i S_{\mathscr{C}}$$

$$\text{et } e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = \mu_0 n S_{\mathscr{C}} I_0 \omega \sin\omega t$$

$$\boxed{e(t) = \mu_0 n S_{\mathscr{C}} \omega I_0 \sin\omega t}$$

Même raisonnement que pour (3.4.2-) :

$$\vec{E}(M) = E_\theta(r)\vec{e_\theta} \Rightarrow e(t) = \oint_{(C)} \vec{E}.\vec{dl}$$

(C) est un cercle de rayon r, d'axe (Oz), avec $r < R$

$$\Rightarrow \phi = \mu_0 n i \pi r^2 \quad \text{et} \quad \boxed{E_\theta(r) = \frac{\mu_0 n I_0 r \omega}{2} \sin\omega t}$$

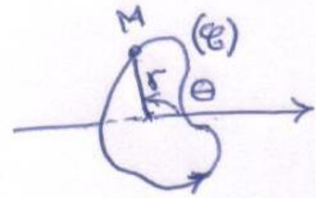
Rq : $\oint_{(\mathscr{C})} \vec{E} \cdot \vec{dl} = e(t)$ ne dépend pas de $(\mathscr{C})$

__Complément :__ On peut vérifier le résultat par un calcul explicite.

On pose $\alpha = \mu_0 n \omega I_0 \sin \omega t \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{2} \alpha r \vec{e_\theta}$

et on veut montrer que $\oint_{(\mathscr{C})} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \alpha . S_{\mathscr{C}}$

Paramétrons $(\mathscr{C})$ par (r, θ)



$M \in (\mathscr{C})$: $\vec{OM} = r \vec{e_r}$

et $\vec{dl} = dr \vec{e_r} + r d\theta \vec{e_\theta}$

$$\Rightarrow \oint_{(\mathscr{C})} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{1}{2} \alpha \oint_{(\mathscr{C})} r^2 d\theta$$

L'aire de la surface hachurée est égale à l'aire d'un triangle isocèle de hauteur r et de base $rd\theta$.

$$\Rightarrow dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

D'où $\oint_{(\mathscr{C})} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \alpha \oint_{(\mathscr{C})} dS = \alpha . S_{\mathscr{C}}$ __C.Q.F.D__